An SDE approach to leafwise diffusions on foliated spaces and its applications (Symposium on Probability Theory)

須崎, 清剛

数理解析研究所講究録
第 1903 巻 2014 年 186-192

An SDE approach to leafwise diffusions on foliated spaces and its applications

大阪大学大学院理学研究科　須崎 清剛 *

Kiyotaka Suzaki
Graduate School of Science,
Osaka University

概 要

本稿では，[6] とその内容に関する 2013 年度確率論シンポジウムにおける発表の概略を述べる．コンパクトな foliated space が与えられたとき，確率微分方程式を用いてその上の leafwise diffusion を構成する．本構成によってある確率微分方程式の一意的な強い解として得られる leafwise diffusion は，出発点に関する確率連続性をもつことが示され，その結果 Feller 性が導かれる．さらに応用として，leafwise diffusion に 関するある種の極限定理が得られることを述べる．

0　導入

多様体上の非特異な流れとして表現される連続時間の力学系が与えられたとき，その多様体は流れの各軌道を leaf とするような 1 次元の foliated space となっている．よって，各 leaf を軌道の対応物と見なすことにより foliated space は力学系の一般化と考えることができる．もし，foliated space の力学系的な性質を反映するような測度の族を見つけることができれば，それらを用いて力学系のエルゴード理論から foliated space のエルゴード理論へと発展させることができる．Garnett [2] や Candel [1] らによって導入された leafwise diffusion とその拡散不変測度である調和測度は，foliated space のエルゴード理論の中で重要な役割を果たす．

本稿では，確率微分方程式を用いて先行研究とは異なる方法でコンパクトな foliated space 上の leafwise diffusion の構成を試み，得られた結果を述べる．このようにして得られた leafwise diffusion は，出発点に関する確率連続性をもつことが示される．さらに本構成は，コンパクトな manifold 上の diffusion の場合と同様の方法で，コンパクトな foliated space 上の leafwise diffusion に関する極限定理を導くことを可能にする．

*k-suzaki@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

1 foliated space の定義

M と Z を局所コンパクトで可分な距離付け可能空間とする．まず最初に本稿内で用いる関数や写像の滑らかさの定義を述べる．$0 \leq k \leq \infty$ と $\mathbb{R}^d \times Z$ の開集合 U に対し，$f : U \to \mathbb{R}$ が C_L^k 級であるとは，任意の z に対し，$f(\cdot, z)$ は C^k 級で各偏導関数が U 上連続であるときをいう．$f : U \to \mathbb{R}^q$ が C_L^k 級であるとは，f のどの成分関数も C_L^k 級であるときをいう．これらの滑らかさの定義を用いて，foliated space の定義を述べる．

定義 1. 次の (i), (ii) の性質をもつ M の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ が存在するとき，M は横断方向 Z 型で d 次元の葉層付き空間（foliated space）という．

(i) 各 α に対して，U_α から $\mathbb{R}^d$ の開集合 $B_{\alpha,1}$ と Z の開集合 $B_{\alpha,2}$ との直積への同相写像 $\varphi_\alpha : U_\alpha \to B_{\alpha,1} \times B_{\alpha,2}$ が存在する．

(ii) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ のとき，その上の座標変換は次のような形で与えられる：

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \ni (y_\alpha, z_\alpha) \mapsto (y_\beta(y_\alpha, z_\alpha), z_\beta(z_\alpha)) \in \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$

ここで，y_β は C_L^∞ 級であり，z_β は連続である．

$\varphi_\alpha^{-1}(B_{\alpha,1} \times \{z\})$ の形をした集合は plaque と呼ばれ，plaque を繋いで得られる M の部分集合は葉（leaf）と呼ばれる．各 leaf には plaque を座標近傍とするような滑らかな多様体の構造が入り，M はいくつもの leaf によって分割されていることがわかる．すなわち，$\mathcal{L} = \{L_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を leaf の集合とするとき，$M = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$ となる．

2 結果1（SDEを用いたA-leafwise diffusion の構成）

以下では foliated space M はコンパクトであると仮定する．このとき，各 leaf はコンパクトであるとは限らないことに注意する．$C(M)$ を M 上の連続関数全体とし，$1 \leq k \leq \infty$ に対して，$C_L^k(M)$ を各座標近傍上で C_L^k 級であるような M 上の関数全体とする．また，

$$g : M \ni x = (y, z) \mapsto g_{ij}(y, z) dy^i \otimes dy^j \in T_x(L_x)^* \otimes T_x(L_x)^*$$

と

$$b : M \ni x = (y, z) \mapsto b^i(y, z) \frac{\partial}{\partial y^i} \in T_x(L_x)$$

をそれぞれ各座標近傍上で C_L^∞ 級の表示をもつ M 上の Riemann 計量とベクトル場とする．ここで L_x は $x \in M$ の属す leaf を表す．g によって定まる leafwise Laplace-Beltrami 作用素 Δ_g を用いて $C_L^2(M)$ から $C(M)$ へ定義される線形作用素 $A = (1/2)\Delta_g + b$ を考える．

注意 1. 各座標近傍上で C_L^∞ 級の係数をもち，leaf ごとに 0 次の項をもたない 2 階の楕円型偏微分作用素となっているような $C_L^2(M)$ 上の線形作用素は，適当な Riemann 計量 g とベクトル場 b を用いて A のように表現される．

$\pi : O(\mathcal{L}) \to M$ を計量 g の入った M の正規直交標構束とする．すなわち

$$O(\mathcal{L}) = \{r = (x, e) : x \in M,\ e \text{ は } T_x(L_x) \text{ の } g \text{ に関する正規直交基底}\},$$

$$\pi : O(\mathcal{L}) \ni r = (x, e) \mapsto x \in M$$

とする．

注意 2. 確率論シンポジウムにおける発表では，foliated space M の正規直交標構束を $O(M)$ と表した．しかし M が多様体の場合，通常の正規直交標構束と混同するため，ここでは $O(\mathcal{L})$ と表すことにする．

M の foliated space の構造から $O(\mathcal{L})$ もまたコンパクトな foliated space となることがわかる．b の $O(\mathcal{L})$ への水平リフト $\widetilde{H}_0$ と標準水平ベクトル場 $\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \ldots, \widetilde{H}_d$ から定まる $O(\mathcal{L})$ 上の確率微分方程式

$$dR(t) = \widetilde{H}_\alpha(R(t)) \circ dB^\alpha(t) + \widetilde{H}_0(R(t))\, dt \tag{1}$$

を考える．(1) の解、およびそれを M へ射影して得られる確率過程に関して，次のことを示すことができる．

定理 1. [6, Theorem 2.5]

(i) foliated space $O(\mathcal{L})$ 上の確率微分方程式 (1) は，一意的な強い解をもつ．とくに各 $r \in O(\mathcal{L})$ に対して，d-次元 Wiener 空間 (W_0^d, P^W) 上で定義された r を出発点とする (1) の解 $R(r) = \{R(t, r)\}_{t \geq 0}$ が存在する．

(ii) $\{R(r)\}_{r \in O(\mathcal{L})}$ は出発点に関する確率連続性をもつ．すなわち，もし $d_{O(\mathcal{L})}$ を $O(\mathcal{L})$ の距離とするとき，任意の $\epsilon > 0$ と $T > 0$ に対し，$\delta > 0$ であって，$d_{O(\mathcal{L})}(r, \tilde{r}) < \delta$ ならば

$$P^W\left(\sup_{0 \leq t \leq T} d_{O(\mathcal{L})}\left(R(t, r), R(t, \tilde{r})\right) < \epsilon\right) \geq 1 - \epsilon$$

をみたすものが存在する．

(iii) $\pi(R(r))$ の分布は $x = \pi(r)$ のみに依存する．$X(t,x) = \pi(R(t,r))$ とおけば，$X(x) = \{X(t,x)\}_{t\geq 0}$ はパスが L_x に含まれる M-値拡散過程である．

(iv) $f \in C(M)$ に対して $(T(t)f)(x) = E[f(X(t,x))]$ とする．このとき，$\{T(t)\}_{t\geq 0}$ は A の閉拡大を生成作用素とする $C(M)$ 上の Feller 半群である．

証明は，[3, Chapter V-1] にあるような多様体上の確率微分方程式の一意的な強い解の存在証明と同様の方法で行う．定理 1-(ii) は，適当な停止時刻を用いて座標近傍内での確率連続性の問題へと帰着し，次の補題を用いることで証明される．

補題 1. [6, Lemma 3.1-(iii)] $\mathbb{R}^d \times Z$ 上で定められた C_L^∞ 級写像 $\sigma(y,z) = (\sigma_\alpha^i(y,z)) \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^r$ と $\sigma_0(y,z) = (\sigma_0^i(y,z)) \in \mathbb{R}^d$ を用いて定まる確率微分方程式

$$\begin{cases} dY(t) &= \sigma_\alpha(Y(t),z)\,dB^\alpha(t) + \sigma_0(Y(t),z)\,dt \\ \;Y(0) &= y \end{cases}$$

の (W_0^d, P^W) 上の解を $Y^{(y,z)} = \left\{Y^{(y,z)}(t)\right\}_{t\geq 0}$ とする．このとき，任意の $p \geq 1$ と $T > 0$, そして $\mathbb{R}^d \times Z$ のコンパクト集合 C に対して，

$$\lim_{\delta\to 0} \sup \left\{ E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left| Y^{(y,z)}(t) - Y^{(\tilde{y},\tilde{z})}(t) \right|^p \right] : (y,z), (\tilde{y},\tilde{z}) \in C, \right.$$
$$\left. |y-\tilde{y}| + d_Z(z,\tilde{z}) < \delta \right\} = 0$$

が成り立つ．ここで，d_Z は Z の距離である．

注意 3. foliated space は多様体の構造をもつとは限らないため，出発点に関する連続性（とくに leaf を横断する方向）や微分可能性はただちにはわからない．しかし，定理 1-(ii) の確率連続性によって，定理 1-(iv) の Feller 性が導かれる．

Feller 性と M のコンパクト性から $X = \{X(x)\}_{x\in M}$ の拡散不変測度が存在し，それらは A-調和測度と呼ばれる．調和測度は Garnett [2] によってコンパクトな foliated Riemannian manifold 上の leafwise Brownian motion の場合に導入され，それらに対してエルゴード理論におけるいくつかの基本的な結果が示されている．その中の Feller 性の証明中にあった難点を克服し一般化を行ったのが Candel であって，[1] において発展方程式の一般論と Hille-Yosida の定理を用いて，A の閉拡大を生成作用素とするような Feller 半群とそれによって定まる各パスが 1 つの leaf に含まれるような M 上の拡散過程を構成している．このような拡散過程を A-leafwise diffusion と呼ぶことにする．先行研究と比較して，定理 1 は foliated space 上の確率微分方程式の強い解の存在を示すことで A-leafwise diffusion が構成できることを述べている．さらに本構成によって，次節に述べるような A-leafwise diffusion に関する極限定理が容易に得られる．

3 結果2（A-leafwise diffusion に関する極限定理）

集合

$$Q=\left\{x\in M:\ \text{任意の}\ f\in C(M)\ \text{に対して}\right.$$
$$\left.\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(X(s,x))\,ds=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T T(s)f(x)\,ds\ \ P^W\text{-a.s.}\right\}$$

を考える．この集合は$\{X(x)\}_{x\in M}$の分布のみに依存して定まり，また，$C(M)$の可分性からMのBorel集合であることがわかる．集合Qを用いて，次の極限定理が得られる．

定理 2. [6, Proposition 2.7 and Theorem 2.8]

(i) 任意のA-調和確率測度mに対して$m(Q)=1$となる．

(ii) $x\in Q$に対し，A-調和確率測度m_xが存在して，どんな$f\in C(M)$に対しても

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(X(s,x))\,ds\to\int_M f\,dm_x\quad P^W\text{-a.s.}\quad (T\to\infty)$$

が成り立つ．

(iii) M上の関数fは，$h\in C_L^2(M)$を用いて$f=Ah$と表されているとする．このとき，任意の$x\in Q$に対し

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{\lambda(\cdot)} f(X(s,x))\,ds\to W_{\langle f\rangle(x)}(\cdot)\quad \text{in law}\quad (\lambda\to\infty)$$

が成り立つ．ここで$W_{\langle f\rangle(x)}=\left\{W_{\langle f\rangle(x)}(t)\right\}_{t\geq 0}$は各時刻$t$で平均0，分散

$$\left(\int_M \|\mathrm{grad}_L h\|^2\,dm_x\right)\cdot t$$

をもつ1次元Brown運動であり，$\|\mathrm{grad}_L h\|$はleafごとに計量gによって定まるhの勾配の長さを対応させることで得られる関数である．

定理2-(i)は，エルゴード定理とマルチンゲール収束定理から導かれる．定理2-(ii)は，集合Qの定義と$x\in Q$のときに定まる正値加法的汎関数

$$C(M)\ni f\mapsto\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T T(s)f(x)\,ds$$

が X の拡散不変確率測度になっていることからわかる．定理 2- (iii) は，[5] で使われている方法と同様にして次のように示される．$x \in M$ と，$h \in C_L^2(M)$ を用いて $f = Ah$ と表されている $f \in C(M)$ に対し，確率過程

$$Y_\lambda^x(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\lambda t} f(X(s,x))\, ds$$

を考える．もし $R(r) = \{R(t,r)\}_{t \geq 0}$ が $\pi(R(t,r)) = X(t,x)$ をみたす確率微分方程式 (1) の解であれば

$$\begin{aligned} h(X(t,x)) - h(x) &= h \circ \pi(R(t,r)) - h \circ \pi(r) \\ &= \int_0^t \widetilde{H}_\alpha(h \circ \pi)(R(s,r))\, dw^\alpha(s) + \int_0^t f(X(s,x))\, ds \end{aligned}$$

が成立するとわかる．よって h が有界関数であることに注意すると，Y_λ^x が $\lambda \to \infty$ のとき $W_{\langle f \rangle(x)}$ へ分布収束することを示すためには，マルチンゲール

$$M_\lambda^x(t) = \frac{-1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\lambda t} \widetilde{H}_\alpha(h \circ \pi)(R(s,r))\, dw^\alpha(s)$$

が $\lambda \to \infty$ のとき $W_{\langle f \rangle(x)}$ へ分布収束することを示せばよいが，これは定理 2-(ii) より，

$$\begin{aligned} \langle M_\lambda^x \rangle(t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda t} \|\mathrm{grad}_L h(X(s,x))\|^2\, ds &= \left(\frac{1}{\lambda t} \int_0^{\lambda t} \|\mathrm{grad}_L h(X(s,x))\|^2\, ds \right) \cdot t \\ &\to \left(\int_M \|\mathrm{grad}_L h\|^2\, dm_x \right) \cdot t \quad (\lambda \to \infty)\ P^W\text{-a.s.} \end{aligned}$$

が得られることよりわかる．

注意 4. もし A-調和確率測度が一意的に存在するならば，定理 2-(iii) における極限分散は出発点によらないことがわかる．さらにこのとき，“$x \in Q$” という条件は “$x \in M$” という条件に置き換えることができる．これらの定理の証明の詳細は，[6] の中で与えられている．

注意 5. M が位相力学系から定まる写像トーラスで X が自然な計量から誘導される leafwise Brownian motion である場合に，[4] は 1 次元 Brown 運動の性質を用いて初等的な方法で調和測度の構造を明らかにし，その後定理 2 に対応する結果を導いている．さらに，もし $f \in C(M)$ が調和確率測度 m に対して $\int_M f\, dm = 0$ であったとしても，$f \in A(C_L^2(M))$ とはならない M と X の例を挙げている．

参考文献

[1] A. Candel, *The harmonic measures of Lucy Garnett*, Adv. Math. **176** (2003) 187–247.

[2] L. Garnett, *Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion*, J. Funct. Anal. **51** (1983) 285–311.

[3] N. Ikeda and S. Watanabe, Stochastic differential equations and diffusion processes 2nd. ed., North Holland, Amsterdam, 1989.

[4] T. Morita and K. Suzaki, *Central limit theorem for leafwise Brownian motions on mapping tori*, submitted

[5] Y. Ochi, *Limit theorems for a class of diffusion processes*, Stochastics **15** (1985) 251–269.

[6] K. Suzaki, *An SDE approach to leafwise diffusions on foliated spaces and its applications*, submitted